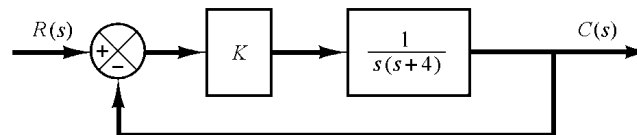


Análisis del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) o Método de Evans

La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la ubicación de los polos en lazo cerrado. Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la ubicación de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida. Los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica.

W. R. Evans diseñó un método sencillo para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se usa ampliamente en la ingeniería de control. Este método se denomina *método del lugar geométrico de las raíces*, y en él se grafican las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema. Observe que el parámetro es, por lo general, la ganancia la cual se varía de cero a infinito, aunque es posible usar cualquier otra variable de la función de transferencia en lazo abierto.

Sea el siguiente sistema de control



La función de transferencia de lazo abierto y de lazo cerrado son

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)} \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 4s + K}$$

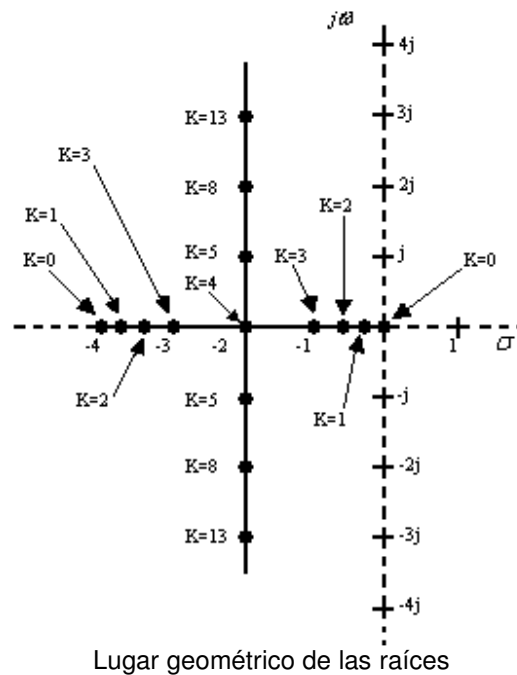
La ecuación característica de lazo cerrado

$$s^2 + 4s + K = 0$$

Las raíces de la ecuación característica o polos de lazo cerrado son

$$s_1, s_2 = -2 \pm \sqrt{4 - K}$$

K	s_1	s_2
0	-4	0
1	-3.732	-0.267
2	-3.414	-0.585
3	-3	-1
4	-2	-2
5	$-2-i$	$-2+i$
8	$-2-2i$	$-2+2i$
13	$-2-3i$	$-2+3i$

**De la grafica:**

El sistema es estable si $K > 0$, dado que en esta condición ambos polos están en el lado izquierdo del plano s .

Respuesta transitoria

1. Sobreamortiguada ($\zeta > 1$) (Polos reales y diferentes)

$$0 < K < 4$$

2. Críticamente amortiguada ($\zeta = 1$) (Polos reales e iguales)

$$K = 4$$

3. Subamortiguada ($0 < \zeta < 1$) (Polos complejos conjugados)

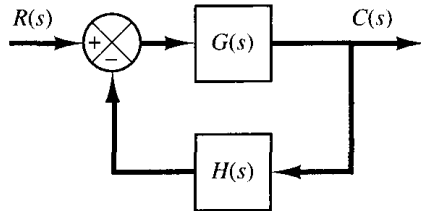
$$K > 4$$

4. Sin amortiguamiento ($\zeta = 0$) (Polos imaginarios)

No hay valor de K que haga que el sistema tenga este tipo de respuesta.

Gráfica del lugar geométrico de las raíces

Considere el siguiente sistema de control, la función de transferencia de lazo cerrado es



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

La ecuación característica de este sistema es

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

o bien

$$G(s)H(s) = -1$$

El término $G(s)H(s)$ es un cociente de polinomios en s .

Como $G(s)H(s)$ es una cantidad compleja se puede representar en, magnitud y ángulo

Condición de ángulo

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Condición de magnitud

$$|G(s)H(s)| = 1$$

Los valores de s que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado. El lugar geométrico de las raíces es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo. Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud.

Magnitud y Ángulo en el plano s .

Por ejemplo Si $G(s)H(s)$ es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

en donde $-p_2$ y $-p_3$ son polos complejos conjugados, el ángulo de $G(s)H(s)$ es

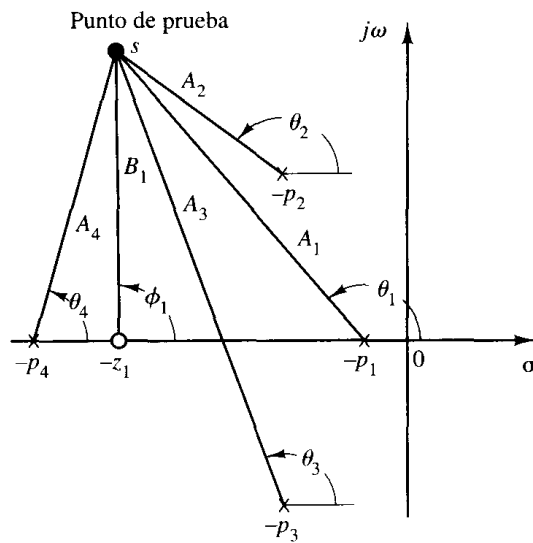
$$\angle G(s)H(s) = \angle(s + z_1) - \angle(s + p_1) - \angle(s + p_2) - \angle(s + p_3) - \angle(s + p_4)$$

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

La magnitud de $G(s)H(s)$ para este sistema es

$$|G(s)H(s)| = \frac{K |s + z_1|}{|s + p_1| |s + p_2| |s + p_3| |s + p_4|}$$

$$|G(s)H(s)| = \frac{K B_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$



Reglas generales para construir los lugares geométricos de las raíces.

1 **Inicio y final de las trayectorias**

Las trayectorias del lugar geométrico de las raíces empiezan en los polos en lazo abierto $G(s)H(s)$ con $K=0$ y terminan en los ceros de $G(s)H(s)$ o en el infinito (ceros finitos o ceros en infinitos) con $K=\infty$.

2 **Trayectorias sobre el eje real:**

Cada parte del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real se extiende sobre un rango de un polo o cero a otro polo o cero. Existen trayectorias sobre el eje real si la cantidad total de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ a la derecha de un punto de prueba es impar.

3 **Ubicación de los ceros infinitos:**

Cuando el lugar geométrico de las raíces tiende a infinito ($s \rightarrow \infty$) lo hace en forma asintótica (en línea recta).

a **Número de asíntotas (#As)**

$$\#As = n_p - n_z$$

donde:

$$n_p = \text{Número de polos de } G(s)H(s)$$

$$n_z = \text{Número de ceros finitos de } G(s)H(s)$$

b **Centroide de las asíntotas (σ_o)**

$$\sigma_o = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n_p - n_z}$$

donde:

$$\sum P_i = \text{Suma de valores de los polos}$$

$$\sum Z_i = \text{Suma de valores de los ceros}$$

c **Angulo de las asíntotas ($\angle As$)**

$$\angle As = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{n_p - n_z} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

4 **Puntos de quiebre o de ruptura (S_q)**

a Cuando existen trayectorias entre dos polos o dos ceros reales, existe puntos de ruptura en el cuál el lugar de las raíces deja el eje real.

Procedimientos para determinar los puntos de quiebre

- i) De la ecuación característica, despejar K
- ii) Derivar una vez con respecto a s e igualar a cero la ecuación resultante.
- iii) Obtener las raíces de la ecuación obtenidas en el inciso (ii), seleccionar el o los puntos de quiebre del sistema.

$$\text{Si } G(s)H(s) = \frac{KA(s)}{B(s)}$$

$$\text{La ec. característica sería } 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{KA(s)}{B(s)} = B(s) + KA(s) = 0$$

$$\text{Despejando } K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

Los puntos de ruptura se determinan resolviendo la siguiente ecuación.

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

5. **Ganancia de quiebre** (K_q)

Es el valor de K en el punto de quiebre.

Se obtiene utilizando la condición de magnitud en el punto S_q

6. **Ganancia Crítica** (K_c)

Es el valor de K que hace que el sistema se encuentre en el límite de estabilidad.

Se obtiene aplicando el criterio de Routh-Hurwitz en la ecuación característica, se establece el rango de valores de K para que el sistema sea estable. Los límites de ese rango definirán los K_c .

7. **Frecuencia Crítica** (ω_c)

El valor de los raíces (polos) cuando se cruza el eje imaginario; esto es cuando $K = K_c$

Se obtiene sustituyendo K_c en el polinomio auxiliar de la tabla de Routh.

8. **Pertenencia de un punto a la trayectoria del L.G.R.**

Para que un punto s pertenezca a la trayectoria del L.G.R. debe cumplir la condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum \text{de los ángulos de los ceros} \\ \text{finitos de } G(s)H(s) \text{ al punto } (s) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \sum \text{de los ángulos de los polos} \\ \text{del } G(s)H(s) \text{ al punto } (s) \end{array} \right] = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

9. **Cálculo de K para cualquier punto s del L.G.R.**

Si un punto s pertenece al L.G.R. se puede obtener la ganancia K que permite tener ese punto.

$$K = \frac{[\text{producto de las longitudes entre el punto } (s) \text{ y los polos de } G(s)H(s)]}{[\text{producto de las longitudes entre el punto } (s) \text{ y los ceros de } G(s)H(s)]}$$

10. Cálculo de el ángulo de salida (o ángulo de llegada) de un trayectoria a partir de un polo complejo (un cero complejo)

Para trazar los lugares geométricos de las raíces con una precisión razonable, debemos encontrar las direcciones de los lugares geométricos de las raíces cercanas a los polos y ceros complejos. Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de todos los otros polos y ceros.

Ángulo de salida desde un polo complejo = 180°

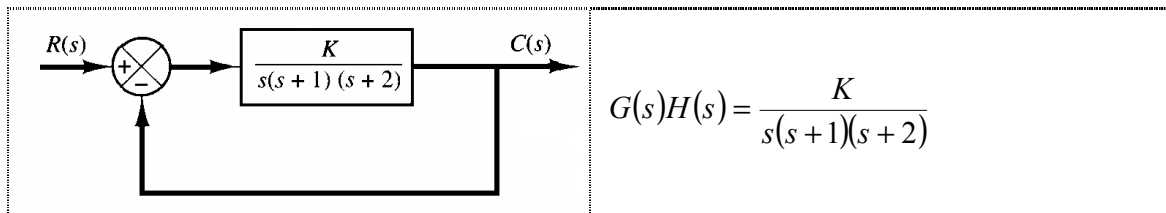
- (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde otros polos)
+ (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde los ceros)

Ángulo de llegada a un cero complejo = 180°

- (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde otros ceros)
+ (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde los polos)

Ejemplo 1

Considere el sistema de la figura.



Trace la gráfica del lugar geométrico de las raíces y determine el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado sea 0.5.

Para el sistema determinado, la condición de ángulo se convierte en

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = -\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = \pm 180^\circ (2k+1) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1 \quad K = |s| |s+1| |s+2|$$

1. **Inicio y final de las trayectorias:** Las trayectorias del L.G.R. empiezan en los polos de lazo abierto (0, -1 y -2) con $K = 0$, y terminan en el infinito con $K = \infty$
2. **Trayectorias sobre el eje real:** Las trayectorias del L.G.R. sobre el eje real existen entre los polos (0 y -1) y de (-2 a $-\infty$).
3. **Ubicación de los ceros infinitos:** La cantidad de trayectorias del L.G.R. que tienden a infinito son 3, ya que no existen ceros finitos.

$$\# As = n_p - n_z = 3 - 0 = 3$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n_p - n_z} = \frac{(0 - 1 - 2) - (0)}{3} = -1$$

$$\angle As = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n_p - n_z} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} = \pm 60^\circ(2k+1) = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ$$

4. **Puntos de quiebre o de ruptura (s_q).** Como existe lugar de las raíces entre dos polos (0 y -1), entonces existe un punto de quiebre.

De la ecuación característica despejamos K

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

derivando K respecto a s e igualando a ceros

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

resolviendo

$$s = -0.422 \quad s = -1.577$$

Como el punto de ruptura debe estar entre (0 y -1) entonces el punto sería

$$s_q = -0.422$$

5. **Ganancia de quiebre (K_q)** Utilizando el punto de quiebre s_q calculamos la ganancia de quiebre con la condición de magnitud

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s_q} = (0.422)(0.578)(1.578) = 0.385$$

6. **Ganancia Crítica** (K_c): Se obtiene aplicando el criterio de Routh-Hurwitz en la ecuación característica

La ecuación característica es $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

La tabla de Routh es

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \leftarrow \text{Polinomio Auxiliar } P(s) \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & 0 \\ s^0 & 3 & \\ & K & \end{array}$$

La ganancia crítica se obtiene de

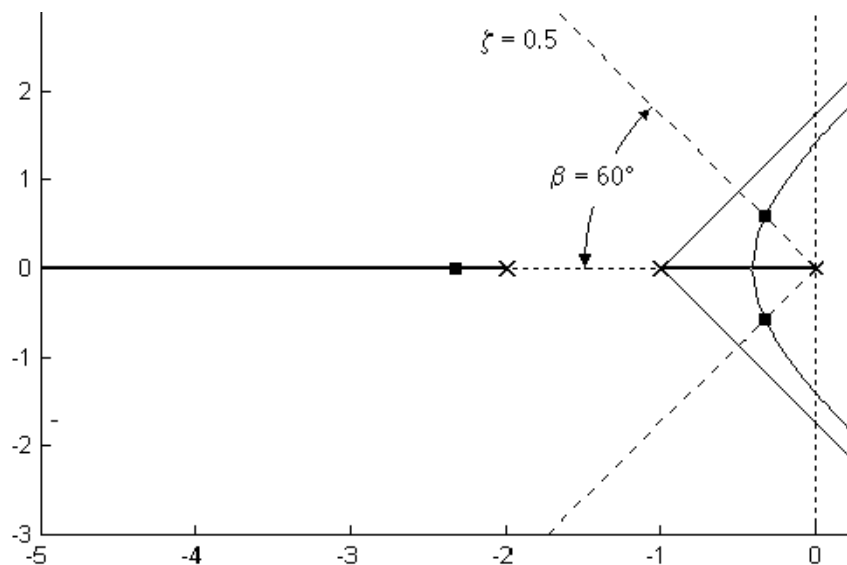
$$\frac{6-K_c}{3} = 0 \quad K_c = 6$$

7. **El punto crítico se obtiene del polinomio auxiliar**

$$3s_c^2 + K_c = 0 \quad 3s_c^2 + 6 = 0 \quad s_c = \pm 1.414j$$

Para determinar la ganancia K que permite tener una respuesta con relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$

Primero se determina el punto s , que este sobre el L.G.R. y que este sobre la recta de relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$



Se determina la ecuación de la recta de $\zeta = 0.5$

$$\begin{aligned} \beta &= \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ \\ y &= x \tan(120^\circ) = -1.732 x \end{aligned}$$

con esta ecuación de la recta se propone un valor en x y se determina el valor en y

el punto debe de cumplir la condición de ángulo para que este sobre el LGR

$s = x + jy$	$-\angle(s)$	$-\angle(s+1)$	$-\angle(s+2)$	$= -180^\circ$
$-0.4+j0.693$	-120°	-49.11°	-23.42°	-192.53°
$-0.3+j0.52$	-120°	-36.61°	-17°	-173.61°
$-0.333+j0.577$	-120°	-40.86°	-19.09°	-179.95°

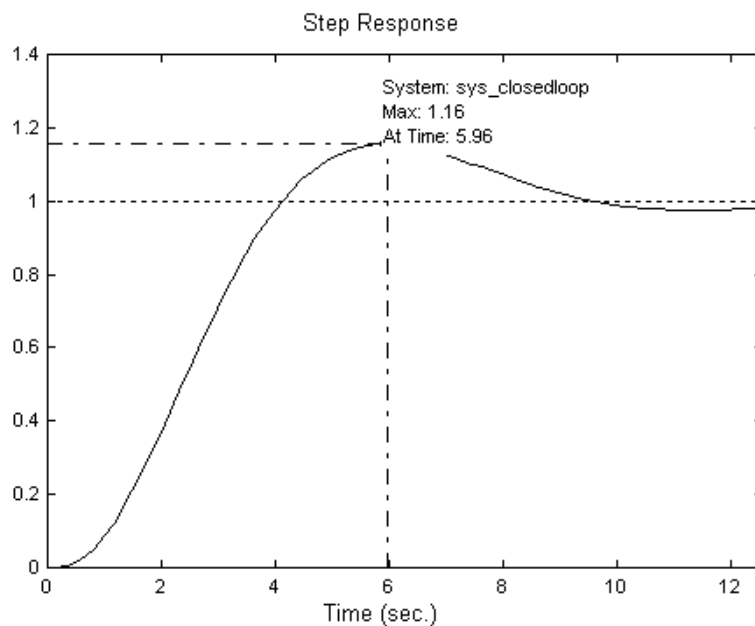
El punto que cumple con las dos condiciones es $s = -0.333 + j0.577$

Aplicando la condición de magnitud

$$K = |s||s+1||s+2|_{s=-0.333+j0.577} = (0.666)(0.882)(1.764) = 1.036$$

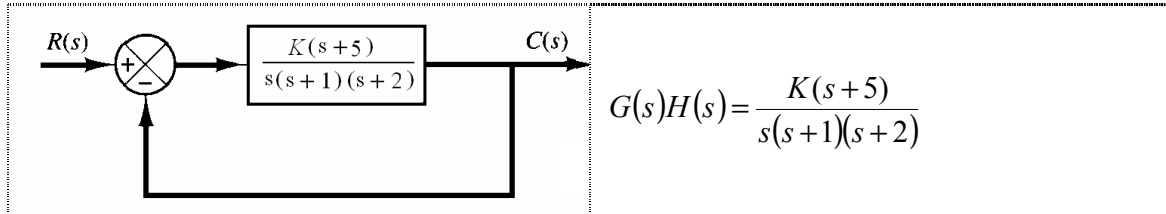
La ganancia que me permite tener una respuesta con una relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$ es

$$K = 1.036$$



Ejemplo 2

Considere el sistema de la figura.



Trace la gráfica del lugar geométrico de las raíces y determine el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado sea 0.6.

Para el sistema determinado, la condición de ángulo se convierte en

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)} = \angle(s+5) - \angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = \pm 180^\circ$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1 \quad K = \frac{|s||s+1||s+2|}{|s+5|}$$

1. **Inicio y final de las trayectorias:** Las trayectorias del L.G.R. empiezan en los polos de lazo abierto $(0, -1 \text{ y } -2)$ con $K = 0$, y terminan, una en (-5) y dos en el infinito con $K = \infty$
2. **Trayectorias sobre el eje real:** Las trayectorias del L.G.R. sobre el eje real existen entre los polos $(0 \text{ y } -1)$ y de $(-2 \text{ a } -5)$.
3. **Ubicación de los ceros infinitos:** La cantidad de trayectorias del L.G.R. que tienden a infinito son 2, ya que solo existe un cero finito.

$$\# As = n_p - n_z = 3 - 1 = 2$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n_p - n_z} = \frac{(0 - 1 - 2) - (-5)}{2} = 1$$

$$\angle As = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n_p - n_z} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{2} = \pm 90^\circ$$

4. **Puntos de quiebre o de ruptura (S_q).** Como existe lugar de las raíces entre dos polos $(0 \text{ y } -1)$, entonces existe un punto de quiebre.

De la ecuación característica despejamos K

$$K = -\frac{s(s+1)(s+2)}{(s+5)}$$

derivando K respecto a s e igualando a ceros

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{2(s^3 + 9s^2 + 15s + 5)}{(s+5)^2} = 0$$

$$s^3 + 9s^2 + 15s + 5 = 0$$

Resolviendo

$$s = -0.447$$

$$s = -1.609$$

$$s = -6.943$$

Como el punto de ruptura debe estar entre (0 y -1) entonces el punto sería

$$s_q = -0.447$$

5. **Ganancia de quiebre** (K_q) Utilizando el punto de quiebre s_q calculamos la ganancia de quiebre con la condición de magnitud

$$K = \left| \frac{s(s+1)(s+2)}{(s+5)} \right|_{s_q} = \frac{|s||s+1||s+2|}{|s+5|} \Big|_{s=-0.447} = \frac{(0.447)(0.553)(1.553)}{4.553} = 0.084$$

6. **Ganancia Crítica** (K_c): Se obtiene aplicando el criterio de Routh-Hurwitz en la ecuación característica

La ecuación característica es $s^3 + 3s^2 + (2+K)s + 5K = 0$

La tabla de Routh es

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2+K \\ s^2 & 3 & 5K \leftarrow \text{Polinomio Auxiliar P(s)} \\ s^1 & \frac{6-2K}{3} & 0 \\ s^0 & 5K & \end{array}$$

La ganancia crítica se obtiene de

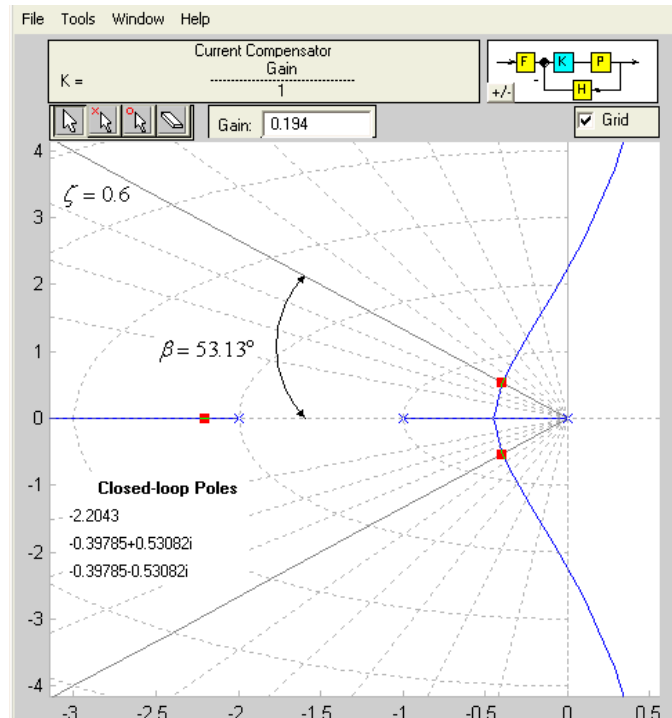
$$\frac{6-2K_c}{3} = 0 \quad K_c = 3$$

7. **El punto crítico se obtiene del polinomio auxiliar**

$$3s_c^2 + 5K_c = 0 \quad 3s_c^2 + 15 = 0 \quad s_c = \pm 2.236j$$

Para determinar la ganancia K que permite tener una respuesta con relación de amortiguamiento $\zeta = 0.6$

Primero se determina el punto s , que este sobre el L.G.R. y que este sobre la recta de relación de amortiguamiento $\zeta = 0.6$



Se determinan los puntos que estén sobre la recta de $\zeta = 0.6$

$$\beta = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1}(0.6) = 53.13^\circ$$

$$y = x \tan(126.87^\circ) = -1.333 x$$

con esta ecuación de la recta se propone un valor en x y se determina el valor en y

el punto debe de cumplir la condición de ángulo para que este sobre el LGR

$s = x + jy$	$\angle(s+5)$	$-\angle(s)$	$-\angle(s+1)$	$-\angle(s+2)$	$= -180^\circ$
$-0.4+0.533j$	6.61°	-126.89°	-41.61°	-18.42°	$= -180.31^\circ$
$-0.398+0.532j$	6.59°	-126.8°	-41.46°	-18.37°	$= -180.04^\circ$

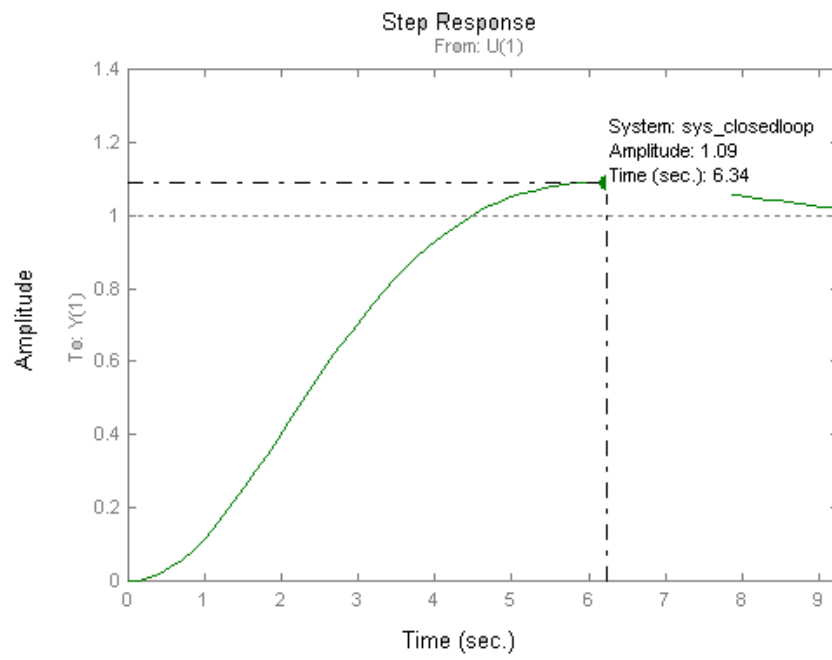
El punto que cumple con las dos condiciones es $s = -0.398 + 0.532j$

Aplicando la condición de magnitud

$$K = \frac{|s||s+1||s+2|}{|s+5|} \Big|_{s=-0.398+0.532j} = \frac{(0.664)(0.803)(1.688)}{(4.632)} = 0.194$$

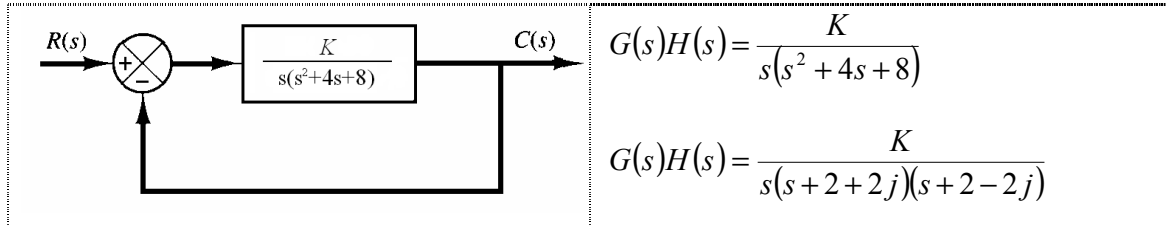
La ganancia que me permite tener una respuesta con una relación de amortiguamiento $\zeta = 0.6$ es

$$K = 0.194$$



Ejemplo 3

Considere el sistema de la figura.



Para el sistema determinado, la condición de ángulo es

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K}{s(s+2+2j)(s+2-2j)} = -\angle(s) - \angle(s+2+2j) - \angle(s+2-2j) = \pm 180^\circ$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+2+2j)(s+2-2j)} \right| = 1 \quad K = |s||s+2+2j||s+2-2j|$$

1. **Inicio y final de las trayectorias:** Las trayectorias del L.G.R. empiezan en los polos de lazo abierto $(0, -2-2j$ y $-2+2j)$ con $K = 0$, y terminan, en el infinito con $K = \infty$.
2. **Trayectorias sobre el eje real:** Las trayectorias del L.G.R. sobre el eje real existen entre 0 y $-\infty$.
3. **Ubicación de los ceros infinitos:** La cantidad de trayectorias del L.G.R. que tienden a infinito son 3, ya que no existen ceros finitos.

$$\# As = n_p - n_z = 3 - 0 = 3$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n_p - n_z} = \frac{(0 - 2 + 2j - 2 - 2j)}{3} = -1.333$$

$$\angle As = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n_p - n_z} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

4. **Puntos de quiebre o de ruptura (S_q):** No existe punto de quiebre.
5. **Ganancia de quiebre (K_q):** No existe ganancia de quiebre
6. **Ganancia Crítica (K_c):** Se obtiene aplicando el criterio de Routh-Hurwitz en la ecuación característica

La ecuación característica es $s^3 + 4s^2 + 8s + K = 0$
La tabla de Routh es

$$\begin{array}{r}
 s^3 \quad 1 \quad 8 \\
 s^2 \quad 4 \quad K \leftarrow \text{Polinomio Auxiliar } P(s) \\
 s^1 \quad \frac{32-K}{4} \quad 0 \\
 s^0 \quad K
 \end{array}$$

La ganancia crítica se obtiene de

$$\frac{32 - K_c}{4} = 0 \quad K_c = 32$$

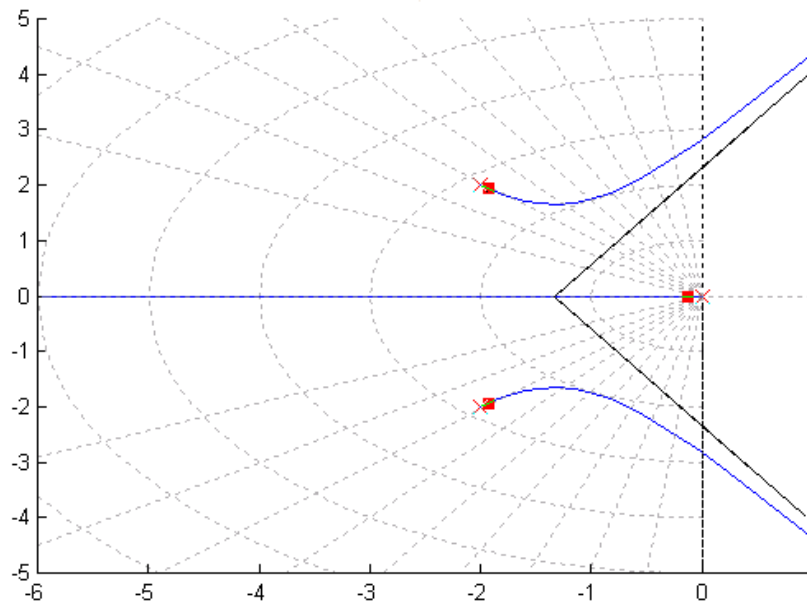
7. El punto crítico se obtiene del polinomio auxiliar

$$4s_c^2 + K_c = 0 \quad 4s_c^2 + 32 = 0 \quad s_c = \pm 2.828j$$

10. **Cálculo de el ángulo de salida (o ángulo de llegada) de un trayectoria a partir de un polo complejo (un cero complejo)**

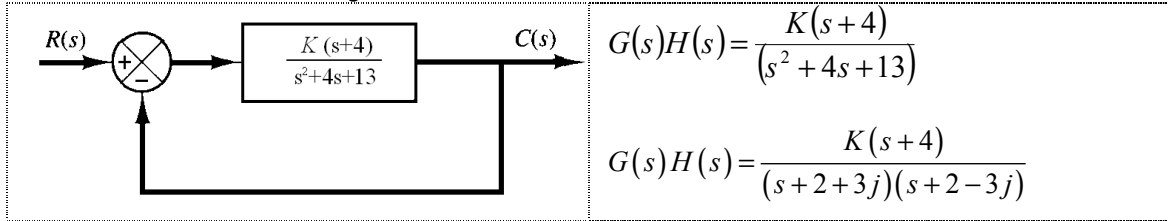
Se toma como polo complejo $s = -2 + 2j$

$$\text{Ángulo de salida} = 180^\circ - (\angle(s) + \angle(s + 2 + 2j)) = 180^\circ - (135^\circ + 90^\circ) = -45^\circ$$



Ejemplo 4

Considere el sistema de la figura.



Para el sistema determinado, la condición de ángulo es

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K(s+4)}{(s+2+3j)(s+2-3j)} = \angle(s+4) - \angle(s+2+3j) - \angle(s+2-3j) = \pm 180^\circ$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K(s+4)}{(s+2+3j)(s+2-3j)} \right| = 1 \quad K = \frac{|s+2+3j||s+2-3j|}{|s+4|}$$

1. **Inicio y final de las trayectorias:** Las trayectorias del L.G.R. empiezan en los polos de lazo abierto $(-2+3j$ y $-2-3j)$ con $K=0$, y terminan, una en el cero (-4) y la otra en el infinito con $K=\infty$
2. **Trayectorias sobre el eje real:** Las trayectorias del L.G.R. sobre el eje real existen entre $(-4$ y $-\infty)$.
3. **Ubicación de los ceros infinitos:** La cantidad de trayectorias del L.G.R. que tienden a infinito es 1, ya que solo existe un cero finito.

$$\# As = n_p - n_z = 2 - 1 = 1$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n_p - n_z} = \frac{(-2+3j - 2-3j)}{1} = -4$$

$$\angle As = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n_p - n_z} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{1} = \pm 180^\circ$$

4. **Puntos de quiebre o de ruptura (S_q):** Como existe lugar de las raíces entre un cero y el infinito $(-4$ y $-\infty)$, entonces existe un punto de quiebre.

De la ecuación característica despejamos K

$$K = -\frac{(s+2+3j)(s+2-3j)}{(s+4)}$$

derivando K respecto a s e igualando a ceros

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(s^2+8s+3)}{(s+4)^2} = 0$$

$$s^2+8s+3=0$$

resolviendo

$$s = -0.394 \quad s = -7.605$$

Como el punto de ruptura debe estar entre $(-4 \text{ y } -\infty)$ entonces el punto sería

$$s_q = -7.605$$

5. **Ganancia de quiebre (K_q):** Utilizando el punto de quiebre s_q calculamos la ganancia de quiebre con la condición de magnitud

$$K = \left| \frac{(s+2+3j)(s+2-3j)}{(s+4)} \right|_{s_q} = \frac{|s+2+3j||s+2-3j|}{|s+4|} \Bigg|_{s=-7.605} = \frac{(6.357)(6.357)}{3.605} = 11.211$$

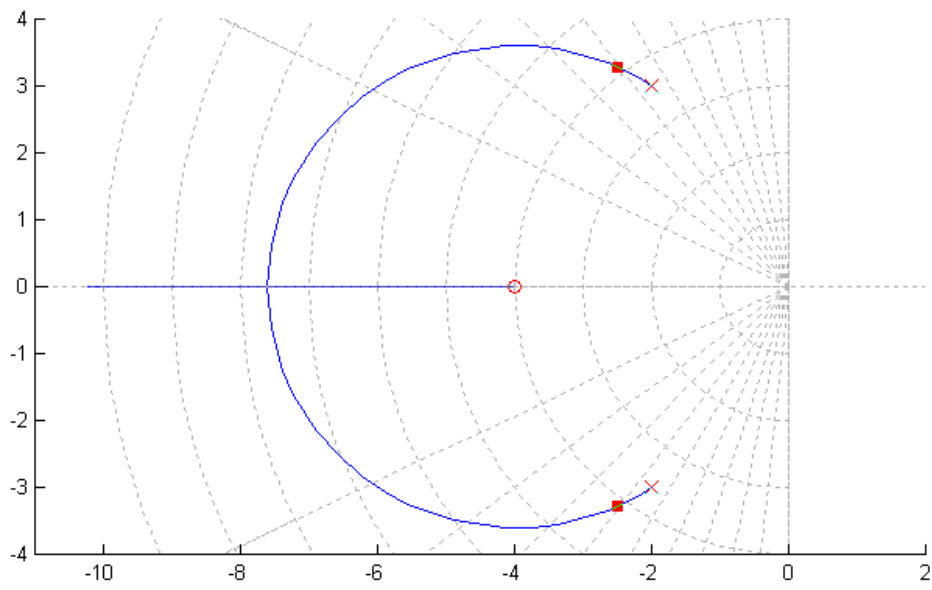
6. **Ganancia Crítica (K_c):** No existe ganancia crítica porque el LGR no cruza el eje imaginario

7. **El punto crítico (s_c):** No existe punto crítico

10. **Cálculo de el ángulo de salida (o ángulo de llegada) de un trayectoria a partir de un polo complejo (un cero complejo)**

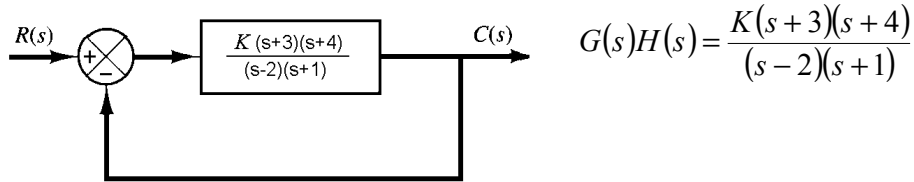
Se toma como polo complejo $s = -2+3j$

$$\text{Ángulo de salida} = 180^\circ - \angle(s+2+3j) + \angle(s+4) = 180^\circ - 90^\circ + 56.31^\circ = 146.31^\circ$$



Ejemplo 4

Considere el sistema de la figura.



Para el sistema determinado, la condición de ángulo se convierte en

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K(s+3)(s+4)}{(s-2)(s+1)} = \angle(s+3) + \angle(s+4) - \angle(s-2) - \angle(s+1) = \pm 180^\circ$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K(s+3)(s+4)}{(s-2)(s+1)} \right| = 1 \quad K = \frac{|s-2||s+1|}{|s+3||s+4|}$$

1. **Inicio y final de las trayectorias:** Las trayectorias del L.G.R. empiezan en los polos de lazo abierto $(2 \text{ y } -1)$ con $K = 0$, y terminan, en los ceros $(-3 \text{ y } -4)$ con $K = \infty$.
2. **Trayectorias sobre el eje real:** Las trayectorias del L.G.R. sobre el eje real existen entre $(2 \text{ y } -1)$ $(-3 \text{ y } -4)$.
3. **Ubicación de los ceros infinitos:** No existen trayectorias del L.G.R. que tiendan a infinito.
4. **Puntos de quiebre o de ruptura (S_q):** Como existe lugar de las raíces entre $(2 \text{ y } -1)$ y el infinito $(-4 \text{ y } -\infty)$, entonces existe un punto de quiebre.

De la ecuación característica despejamos K

$$K = -\frac{(s-2)(s+1)}{(s+3)(s+4)}$$

derivando K respecto a s e igualando a cero

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{(s-2)(s+1)}{(s+3)(s+4)} \right) = -\frac{(8s^2 + 28s + 2)}{(s+3)^2(s+4)^2} = 0$$

$$8s^2 + 28s + 2 = 0$$

resolviendo

$$s = -0.073 \quad s = -3.427$$

Los dos puntos son puntos de ruptura ya que están entre $(2 \text{ y } -1)$ y $(-4 \text{ y } -\infty)$

$$s_{q1} = -0.073 \quad s_{q2} = -3.427$$

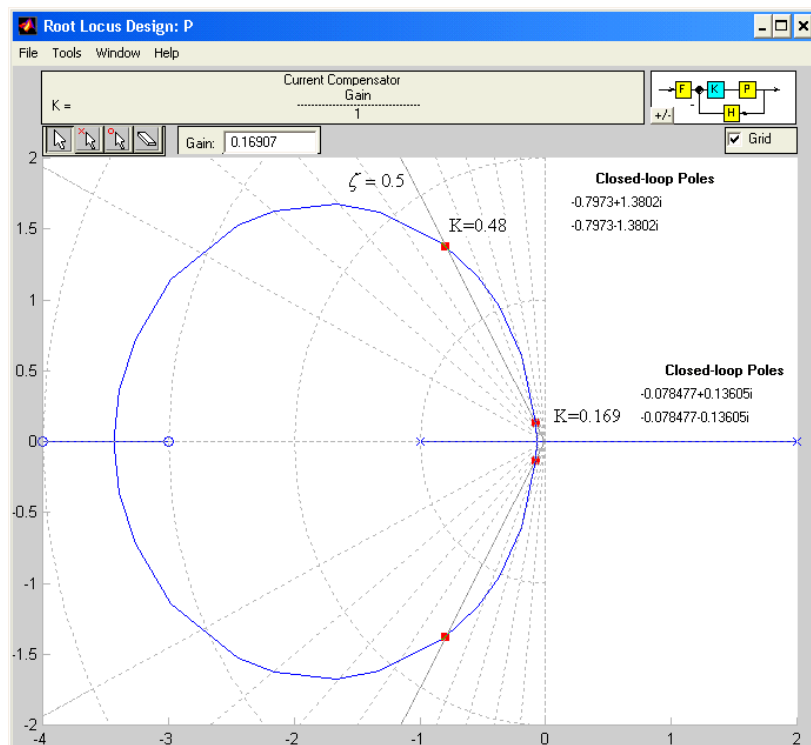
5. **Ganancia de quiebre** (K_q): Utilizando los puntos de quiebre s_{q1} y s_{q2} , calculamos las ganancias de quiebre con la condición de magnitud

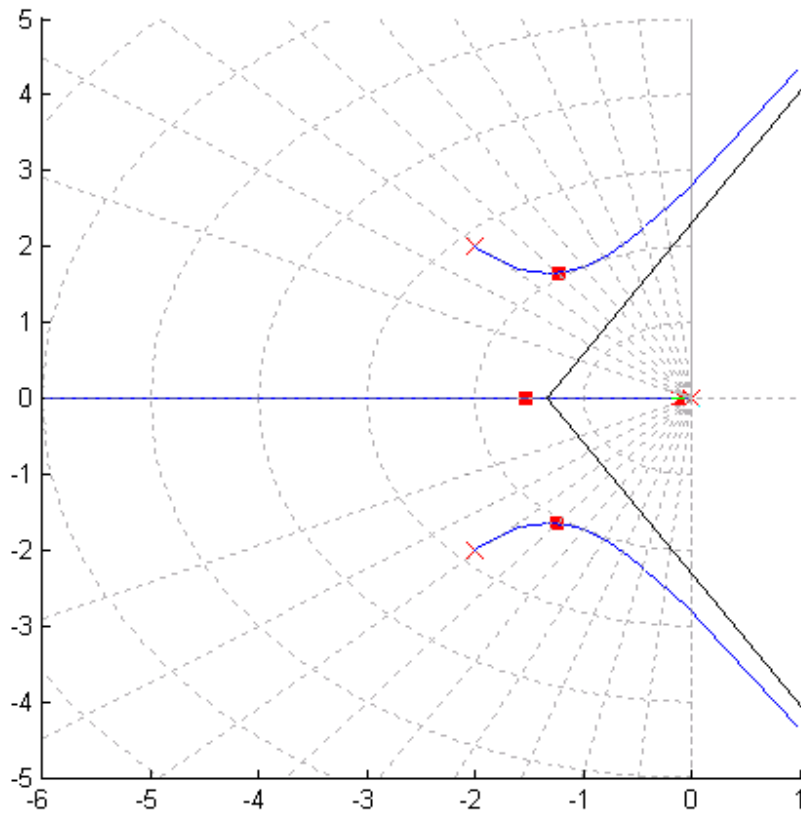
$$K_{q1} = \left| \frac{(s-2)(s+1)}{(s+3)(s+4)} \right|_{s_{q1}} = \left| \frac{s-2}{s+3} \frac{s+1}{s+4} \right|_{s_{q1}=-0.073} = \frac{(2.073)(0.927)}{(3.927)(3.927)} = 0.167$$

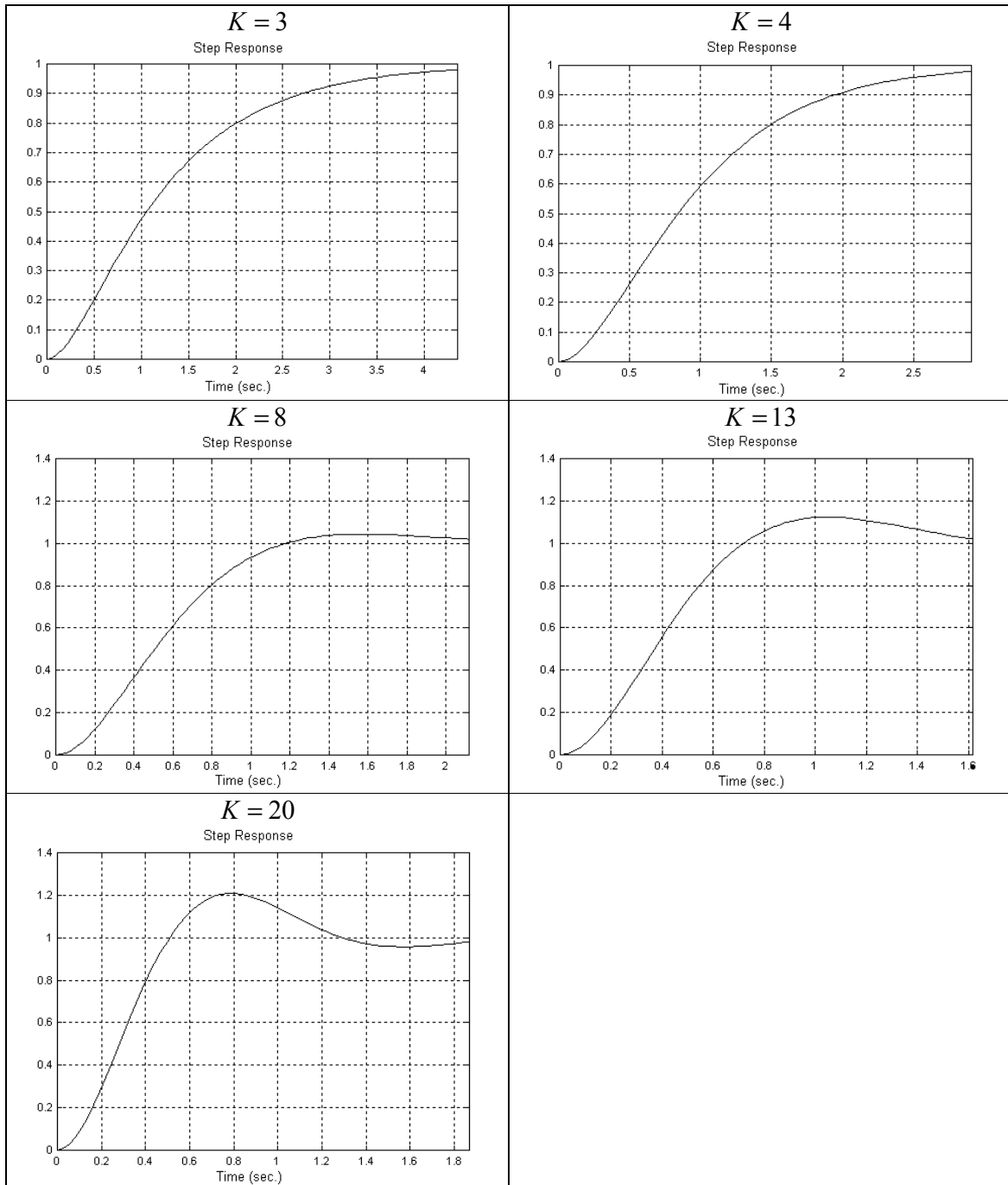
$$K_{q2} = \left| \frac{(s-2)(s+1)}{(s+3)(s+4)} \right|_{s_{q2}} = \left| \frac{s-2}{s+3} \frac{s+1}{s+4} \right|_{s_{q2}=-3.427} = \frac{(5.427)(2.427)}{(0.427)(0.573)} = 53.833$$

6. **Ganancia Crítica** (K_c): No existe ganancia crítica porque el LGR no cruza el eje imaginario

7. **Punto crítico** (s_c): No existe punto crítico

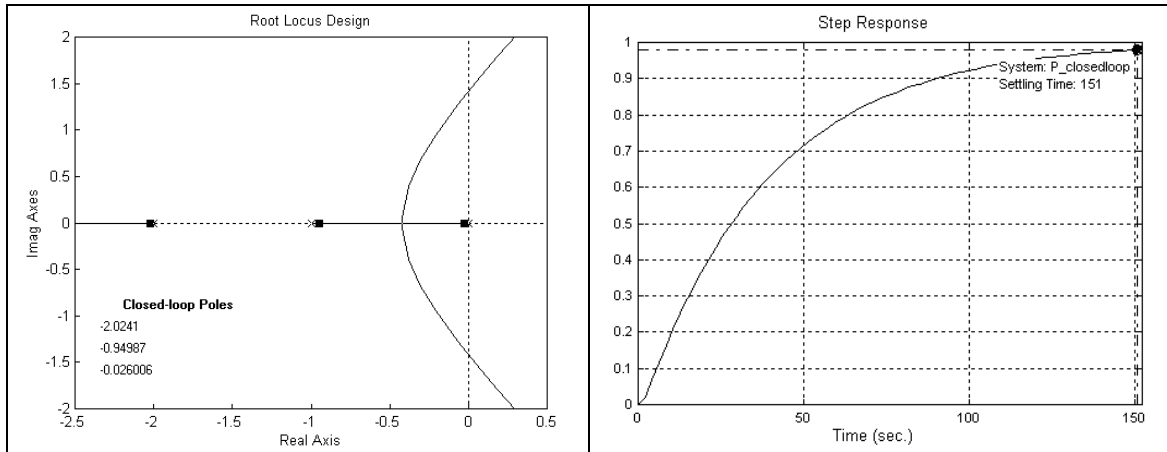




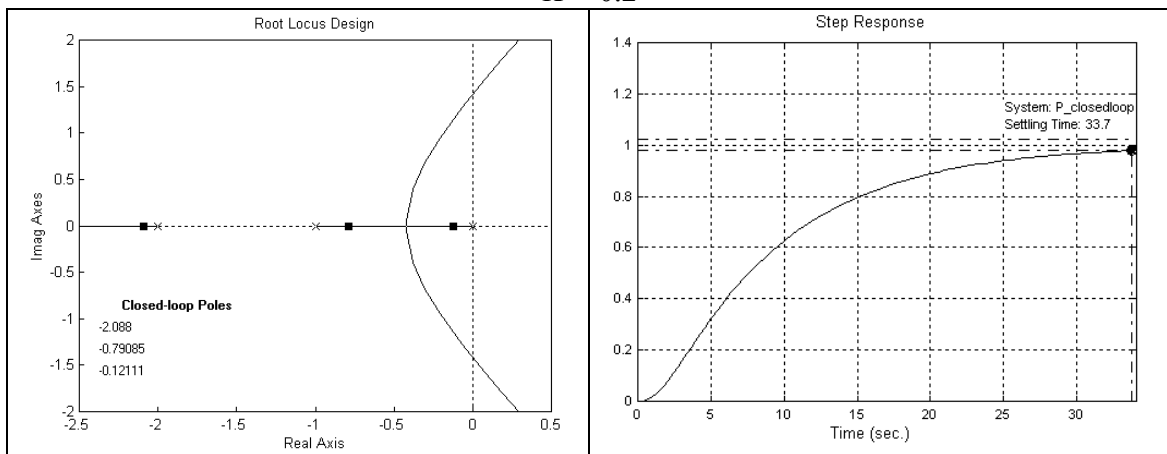


$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

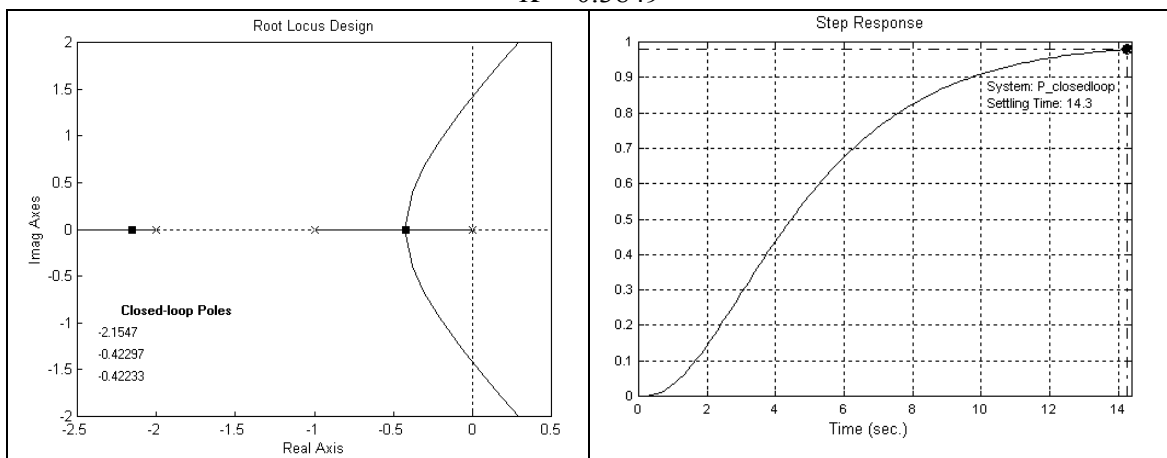
$K = 0.05$



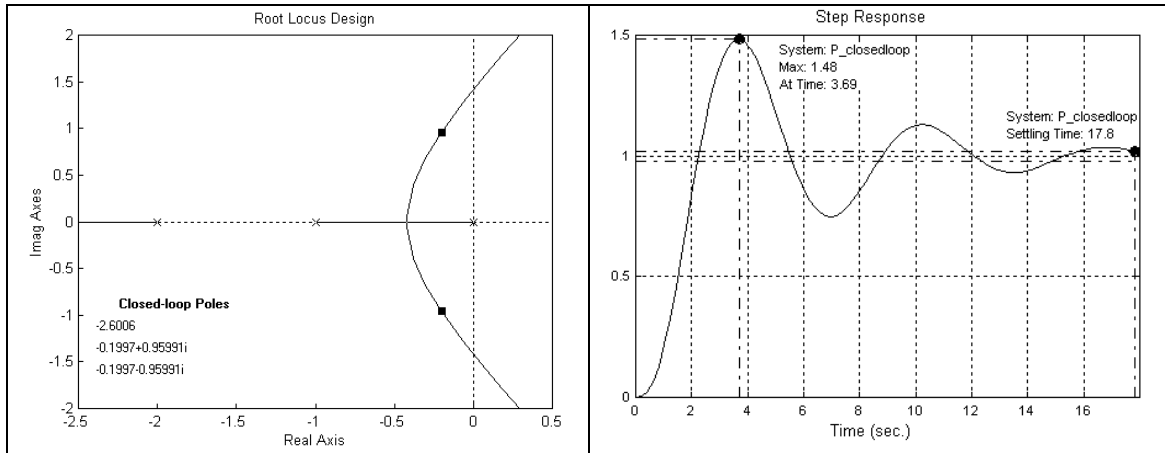
$K = 0.2$



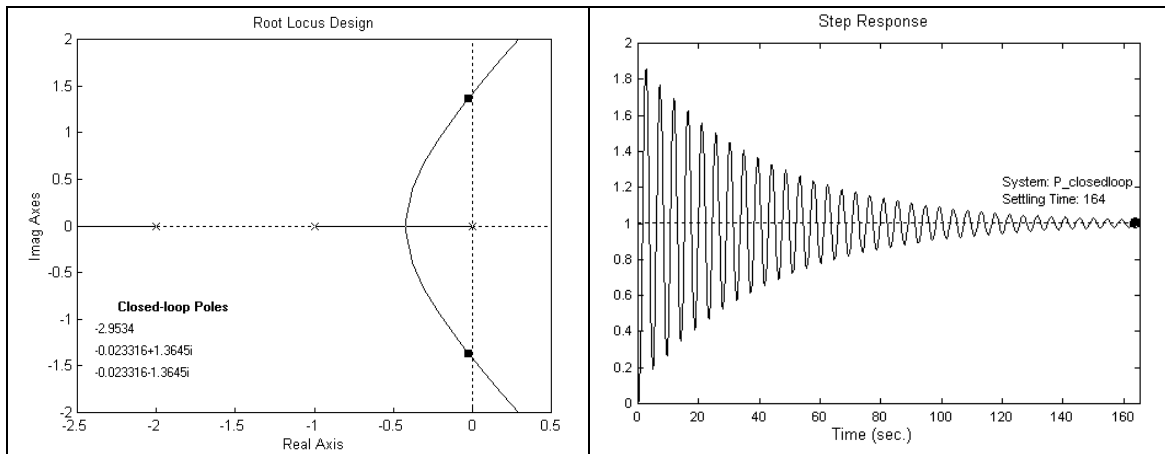
$K = 0.3849$



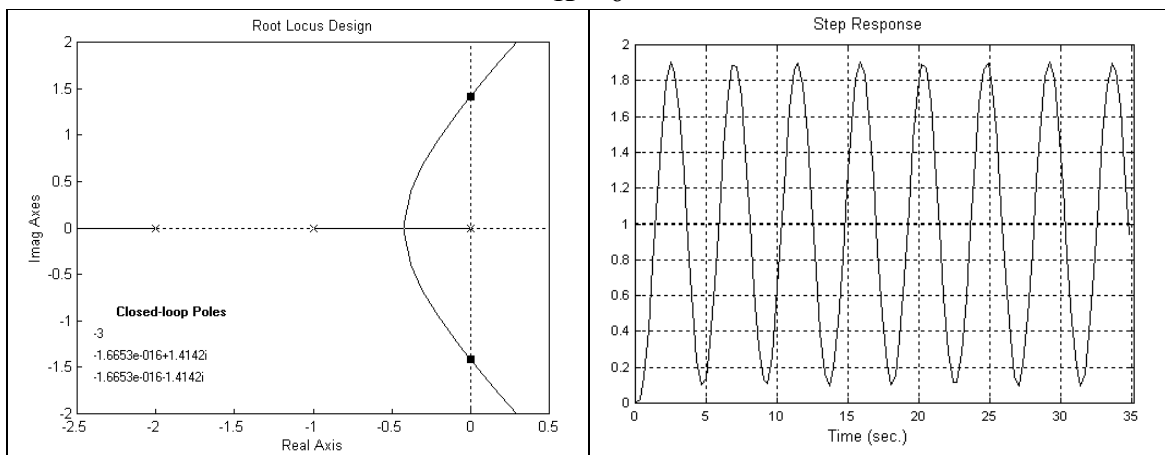
$K = 2.5$



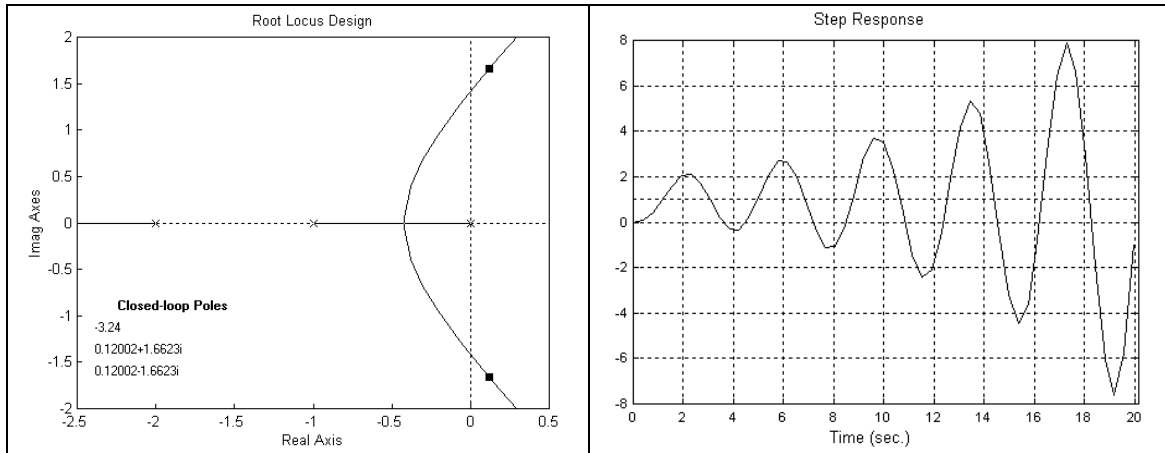
$K = 5.5$



$K = 6$



$K = 9$



K	Mp	Tp	Ts	
.05			151	
.2			33.7	
.3849			14.3	
1.036	16	5.96	12.4	
2.5	48	3.69	17.8	
5.5	86	2.64	164	
6				
9				

