

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El problema más importante de los sistemas de control lineal tiene que ver con la estabilidad. Un sistema de control es estable si y sólo si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s .

Consideremos la siguiente función de transferencia de lazo cerrado.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

En donde las a y las b son constantes y $m \leq n$.

Criterio de estabilidad de Routh.

El criterio de estabilidad de Routh permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano s (raíces positivas) sin tener que factorizar el polinomio. Este criterio de estabilidad sólo se aplica a los polinomios con una cantidad finita de términos.

Procedimiento en el criterio de estabilidad de Routh:

1. Escriba el polinomio en s del denominador en la forma siguiente:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

En donde los coeficientes son cantidades reales. Suponemos que $a_n \neq 0$; es decir, se elimina cualquier raíz cero.

2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz, o raíces imaginarias o que tiene partes reales positivas. En tal caso, el sistema no es estable.

La condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilidad es que todos los coeficientes de la ecuación estén presentes y tengan signo positivo.

3. Si todos los coeficientes son positivos, ordene los coeficientes del polinomio en renglones y columnas de acuerdo con el patrón o arreglo siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 & f_1 & & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array}$$

Los coeficientes $b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots, d_1, d_2, \dots$, etc., se evalúan del modo siguiente:

$$\begin{array}{l}
 b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\
 b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\
 b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{array}$$

La evaluación continúa hasta que todas las restantes son cero.

El criterio de estabilidad de Routh- Hurwitz plantea que el número de raíces de la ecuación con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo.

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que todos los coeficientes de la ecuación sean positivos y que todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo.

Ejemplo 1

Considere el polinomio siguiente:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s^1 + 5 = 0$$

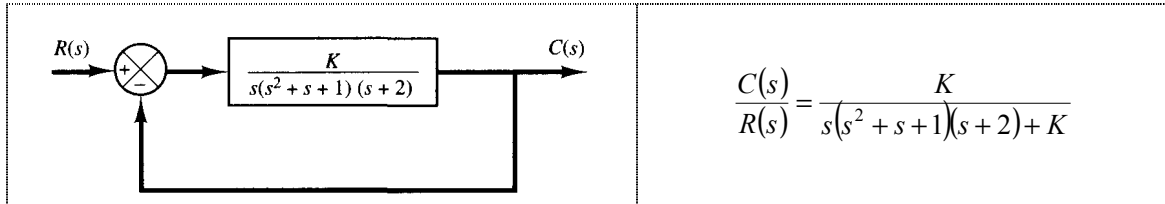
Los primeros dos renglones se obtienen directamente del polinomio dado. El arreglo de coeficientes sería

$$\begin{array}{r}
 s^4 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \\
 s^3 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\
 s^2 \quad 1 \quad 5 \\
 s^1 \quad -6 \\
 s^0 \quad 5
 \end{array}$$

Hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Esto significa que existen dos raíces con partes reales positivas. Observe que el resultado no se modifica cuando los coeficientes de cualquier renglón se multiplican por, o se dividen entre, un número positivo para simplificar el cálculo.

Ejemplo 2**Aplicación del criterio de estabilidad de Routh al análisis de un sistema de control.**

Considere el sistema de la figura. Determine el rango de valores de K para la estabilidad. La función de transferencia en lazo cerrado es



La ecuación característica es

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de coeficientes se convierte en

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$	K	
s^1	$2 - \frac{9}{7}K$		
s^0	K		

Para la estabilidad, K debe ser positiva, y todos los coeficientes de la primera columna deben de serlo también.

$$2 - \frac{9}{7}K > 0 \quad K > 0$$

Por tanto, para que el sistema de control sea estable, el rango de K sería

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Cuando $K = \frac{14}{9}$, el Coeficiente de la primera columna de la fila s^1 se hace cero, esto significa que existen raíces imaginarias y el sistema se vuelve oscilatorio y, matemáticamente, la oscilación se mantiene en una amplitud constante.

Se pueden calcular las raíces imaginarias, considerando un polinomio auxiliar el cuál se obtiene tomando los coeficientes de la fila que se encuentra arriba donde se generó el cero. La ecuación sería

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}s^2 + K &= 0 & \text{como } K &= \frac{14}{9} \\ \frac{7}{3}s^2 + \frac{14}{9} &= 21s^2 + 14 = 3s^2 + 2 = 0 \\ s &= \pm \sqrt{-\frac{2}{3}} = \pm 0.816j \end{aligned}$$

Casos especiales

Si el término de la primera columna de cualquier renglón es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay términos restantes, el término cero se sustituye con un número positivo muy pequeño ε y se evalúa el resto del arreglo.

Ejemplo 3

considere la ecuación

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

El arreglo de coeficientes es

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 = \varepsilon & \\ & 2 \end{array}$$

Si el signo del coeficiente que está encima del cero (ε) es igual al signo que está abajo de él, quiere decir que hay un par de raíces imaginarias.

Ejemplo 4

Si todos los coeficientes de cualquier renglón son cero significa que existen raíces con magnitudes iguales y signos opuestos y/o dos raíces imaginarias conjugadas. En este caso, la evaluación del resto del arreglo continúa mediante la formación de un polinomio auxiliar con los coeficientes del último renglón y mediante el empleo de los coeficientes de la derivada de este polinomio en el renglón siguiente. Tales raíces se encuentran despejando el polinomio auxiliar, que siempre es par. Para un polinomio auxiliar de grado $2n$, existen n pares de raíces iguales y opuestas. Por ejemplo, considere la ecuación:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50 = 0$$

El arreglo de coeficientes es

$$\begin{array}{r} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 24 & 25 \\ 2 & 48 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Polinomio auxiliar } P(s) \\ \leftarrow \text{Renglón cero} \end{array}$$

Todos los términos del renglón s^3 son cero. Después se forma el polinomio auxiliar a partir de los coeficientes del renglón s^4 . El polinomio auxiliar $P(s)$ es

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 + 50$$

lo cual indica que hay dos pares de raíces de igual magnitud y signo opuesto. Estos pares se obtienen resolviendo la ecuación del polinomio auxiliar $P(s) = 0$. La derivada de $P(s)$ con respecto a s es

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Los coeficientes de la última ecuación, sustituyen los términos del renglón 3 del arreglo. Por consiguiente, el arreglo de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{cccc}
 s^5 & 1 & 24 & 25 \\
 s^4 & 2 & 48 & 50 \\
 s^3 & 8 & 96 & 0 \leftarrow \text{Coeficientes de } \frac{dP(s)}{ds} \\
 s^2 & 24 & 50 & \\
 s^1 & \frac{230}{3} & & \\
 s^0 & 50 & &
 \end{array}$$

No existen cambios de signo en la primera columna, no hay raíces con parte real positiva, sin embargo si hay raíces imaginarias.

Despejando las raíces del polinomio auxiliar

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 + 50 = 0$$

Obtenemos

$$s = \pm j4.7863$$

$$s = \pm j1.0446$$

Ejemplo 5

Determine el rango de valores de K para la estabilidad.
La ecuación característica es

$$s^3 + 30s^2 + 200s + Ks + 40K = 0$$

El arreglo de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \quad 200 + K \\ 30 \quad 40K \\ b_1 \\ c_1 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{30(200 + K) - 40K}{30} = 200 - \frac{1}{3}K$$

$$c_1 = 40K$$

Para la estabilidad, K debe ser positiva, y todos los coeficientes de la primera columna deben de serlo también.

$$200 - \frac{1}{3}K > 0, \quad K < 600$$

$$K > 0$$

Por tanto, para que el sistema de control sea estable, el rango de K sería

$$0 < K < 600$$

Cuando $K = 600$, el sistema se vuelve oscilatorio y, matemáticamente, la oscilación se mantiene en una amplitud constante.

Ejemplo 6

Determine la estabilidad para siguiente sistema

La ecuación característica es

$$s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

El arreglo de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{r} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & 10 \\ \varepsilon & 6 & \\ c_1 & 10 & \\ d_1 & & \\ 10 & & \end{array}$$

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon}$$

$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} = 6$$

Como el signo arriba y abajo de ε son diferentes, existen dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna, hay dos raíces con parte real positiva, el sistema es inestable

Ejemplo 7

Determine la estabilidad para siguiente sistema
La ecuación característica es

$$s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63 = 0$$

El arreglo de coeficientes es

s^5	1	4	3	
s^4	1	24	63	
s^3	-20	-60	0	
s^2	21	63	0	← Polinomio auxiliar $P(s)$
s^1	0	0	0	

Todos los términos del renglón s^1 son cero. Entonces se forma el polinomio auxiliar a partir de los coeficientes del renglón s^2 . El polinomio auxiliar $P(s)$ es

$$P(s) = 21s^2 + 63$$

Lo cual indica que hay dos raíces de igual magnitud y signo opuesto. La derivada de $P(s)$ con respecto a s es

$$\frac{dP(s)}{ds} = 42s$$

Los coeficientes del renglón s^1 de la ecuación, se sustituyen por el polinomio determinado. Por consiguiente, el arreglo de coeficientes se convierte en

s^5	1	4	3	
s^4	1	24	63	
s^3	-20	-60	0	
s^2	21	63	0	
s^1	42	0		← Coeficientes de $\frac{dP(s)}{ds}$
s^0	63			

Existen dos cambios de signo en la primera columna, hay dos raíces con parte real positiva.

Pero también existen raíces imaginarias por el cero que se formó en el renglón s^1 . Despejando las raíces del polinomio auxiliar

$$P(s) = 21s^2 + 63 = 0$$

Obtenemos las dos raíces imaginarias

$$s = \pm j1.732$$

Problemas

De las siguientes ecuaciones características, determine la estabilidad del sistema.

1. $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$
2. $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + K = 0$
3. $s^4 + s^3 + 2s^2 + 6s + 8 = 0$
4. $s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0$
5. $s^4 + s^3 + s^2 + s + K = 0$ (caso 1)
6. $s^4 + s^3 + Ks^2 + s + 1 = 0$